Modelli di Polimeri e Passeggiate Aleatorie

Francesco Caravenna

caravenna@math.unipd.it

Università degli Studi di Padova

XVIII Congresso dell'U.M.I.

Bari, 26 settembre 2007

Programma

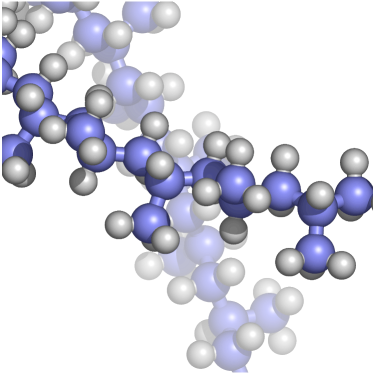
Programma

Che cos'è un polimero?

Un polimero è una grossa molecola costituita da un gran numero di molecole più piccole, dette monomeri, unite a formare una catena.

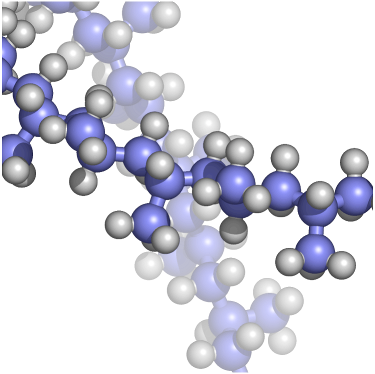
Che cos'è un polimero?

Un polimero è una grossa molecola costituita da un gran numero di molecole più piccole, dette monomeri, unite a formare una catena.



Che cos'è un polimero?

Un polimero è una grossa molecola costituita da un gran numero di molecole più piccole, dette monomeri, unite a formare una catena.

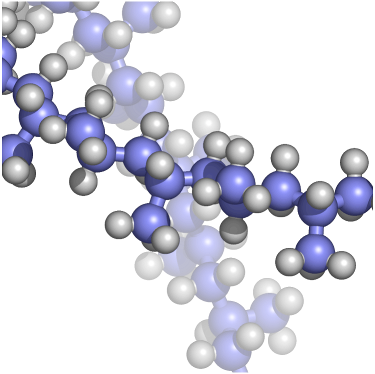


Esempi tipici:

- DNA, RNA
- Proteine
- Materie plastiche

Che cos'è un polimero?

Un polimero è una grossa molecola costituita da un gran numero di molecole più piccole, dette monomeri, unite a formare una catena.



Esempi tipici:

- DNA, RNA
- Proteine
- Materie plastiche

Argomento di ricerca in chimica, fisica, biologia, . . .

Probabilità: due processi basilari

Passeggiata aleatoria semplice $\{S_n\}_n$ su $\mathbb{Z}^d$

$$S_0 = 0 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Incrementi $\{X_i\}_i$ indipendenti, $\mathbf{P}(X_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$, $\forall k = 1, \ldots, d$

Probabilità: due processi basilari

Passeggiata aleatoria semplice $\{S_n\}_n$ su $\mathbb{Z}^d$

$$S_0 = 0 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Incrementi $\{X_i\}_i$ indipendenti, $\mathbf{P}(X_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$, $\forall k = 1, \ldots, d$

Passeggiata aleatoria auto-evitante su $\mathbb{Z}^d$

Condizionata a non visitare alcun sito più di una volta

Probabilità: due processi basilari

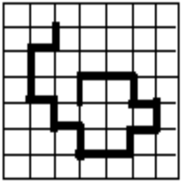
Passeggiata aleatoria semplice $\{S_n\}_n$ su $\mathbb{Z}^d$

$$S_0 = 0 \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Incrementi $\{X_i\}_i$ indipendenti, $\mathbf{P}(X_i = \pm e_k) = \frac{1}{2d}$, $\forall k = 1, \ldots, d$

Passeggiata aleatoria auto-evitante su $\mathbb{Z}^d$

Condizionata a non visitare alcun sito più di una volta



Probabilità: due processi basilari

In che senso questi processi sono legate ai polimeri?

Probabilità: due processi basilari

In che senso questi processi sono legate ai polimeri?

- Esempi di polimeri astratti: incrementi $\leftrightarrow$ monomeri

Probabilità: due processi basilari

In che senso questi processi sono legate ai polimeri?

- Esempi di polimeri astratti: incrementi $\leftrightarrow$ monomeri
- Ma soprattutto:

Modelli per una descrizione statistica di polimeri
in interazione con l'ambiente (Meccanica Statistica)

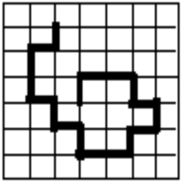
Probabilità: due processi basilari

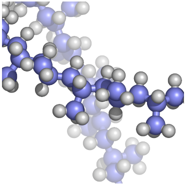
In che senso questi processi sono legate ai polimeri?

- Esempi di polimeri astratti: incrementi $\leftrightarrow$ monomeri
- Ma soprattutto:

Modelli per una descrizione statistica di polimeri
in interazione con l'ambiente (Meccanica Statistica)

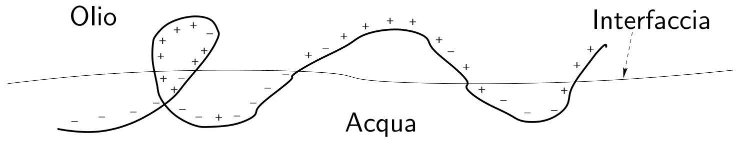
Traiettorie del processo $\leftrightarrow$ Configurazioni del polimero





Il problema del copolimero

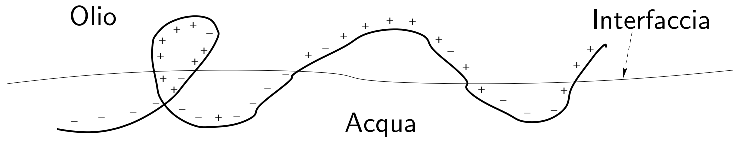
Esempio: copolimero (= polimero disomogeneo)
vicino a un'interfaccia selettiva



Monomeri: $(+) \rightarrow$ idrofobo $(-) \rightarrow$ idrofilo

Il problema del copolimero

Esempio: copolimero (= polimero disomogeneo)
vicino a un'interfaccia selettiva



Monomeri: $(+) \to$ idrofobo $(-) \to$ idrofilo

Transizione di fase:

Localizzazione all'interfaccia vs Delocalizzazione in un solvente

- Comptetizione tra energia e entropia

Il problema del copolimero

Obiettivo: rendere conto di tali fenomeni mediante modelli probabilistici basati su passeggiate aleatorie

Il problema del copolimero

Obiettivo: rendere conto di tali fenomeni mediante modelli probabilistici basati su passeggiate aleatorie

Passeggiata auto-evitante: modello più realistico. . .
. . . ma molto più difficile! [Madras e Slade, Birkhäuser 93]

Il problema del copolimero

Obiettivo: rendere conto di tali fenomeni mediante modelli probabilistici basati su passeggiate aleatorie

Passeggiata auto-evitante: modello più realistico...
...ma molto più difficile! [Madras e Slade, Birkhäuser 93]

Modelli trattabili: basati su passeggiate aleatorie ordinarie (o passeggiate dirette)

Il problema del copolimero

Obiettivo: rendere conto di tali fenomeni mediante modelli probabilistici basati su passeggiate aleatorie

Passeggiata auto-evitante: modello più realistico. . .
. . . ma molto più difficile! [Madras e Slade, Birkhäuser 93]

Modelli trattabili: basati su passeggiate aleatorie ordinarie (o passeggiate dirette)

Secondo il tipo di disomogeneità $\omega = +, -, -, \ldots$ distinguiamo:

1. Modelli periodici: ω è periodica $\sim$ rilevanti per i polimeri sintetici e come approssimazione di modelli disordinati

Il problema del copolimero

Obiettivo: rendere conto di tali fenomeni mediante modelli probabilistici basati su passeggiate aleatorie

Passeggiata auto-evitante: modello più realistico...
...ma molto più difficile! [Madras e Slade, Birkhäuser 93]

Modelli trattabili: basati su passeggiate aleatorie ordinarie (o passeggiate dirette)

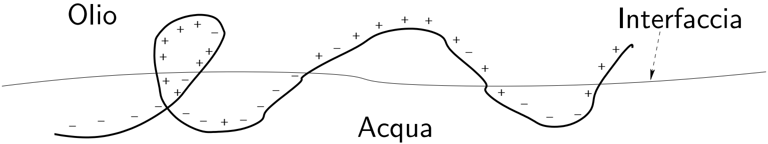
Secondo il tipo di disomogeneità $\omega = +, -, -, \ldots$ distinguiamo:

1. Modelli periodici: ω è periodica $\sim$ rilevanti per i polimeri sintetici e come approssimazione di modelli disordinati
2. Modelli disordinati: ω è la realizzazione di un processo aleatorio $\sim$ rilevanti per le applicazioni biologiche

Programma

Definizione del modello

Ricordiamo il problema:



Definire un modello probabilistico $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ per questa situazione.

Definizione del modello

Ingredienti del modello:

- successione $\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ periodica dei monomeri

Definizione del modello

Ingredienti del modello:

- successione $\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ periodica dei monomeri
- lunghezza $N \in \mathbb{N}$ del polimero

Definizione del modello

Ingredienti del modello:

- successione $\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ periodica dei monomeri
- lunghezza $N \in \mathbb{N}$ del polimero
- parametri di interazione $\lambda, h \geq 0$

Definizione del modello

Ingredienti del modello:

- successione $\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ periodica dei monomeri
- lunghezza $N \in \mathbb{N}$ del polimero
- parametri di interazione $\lambda, h \geq 0$
- passeggiata aleatoria semplice $\left(\{S_n\}, \mathbf{P}\right)$ su $\mathbb{Z}$

Definizione del modello

Ingredienti del modello:

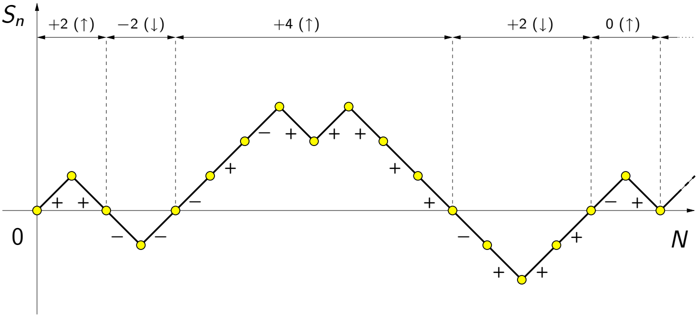
- successione $\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ periodica dei monomeri
- lunghezza $N \in \mathbb{N}$ del polimero
- parametri di interazione $\lambda, h \geq 0$
- passeggiata aleatoria semplice $\big(\{S_n\}, \mathbf{P}\big)$ su $\mathbb{Z}$

Definizione del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ [Bolthausen e den Hollander, AP 97]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) \;:=\; \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\lambda,h}} \cdot \exp\Big(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S)\Big)$$

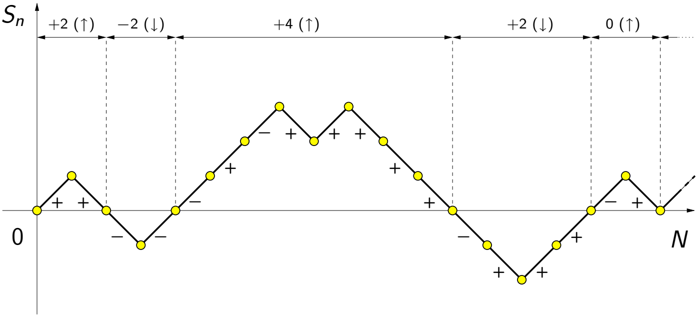
Energia: $$\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) \;:=\; \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\,\mathrm{sign}(S_n)$$

Una traiettoria illustrativa



Energia: $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) := \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\,\mathrm{sign}(S_n) \ = \ \lambda\big(6 + 6h\big)$

Una traiettoria illustrativa



Energia: $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) := \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\,\mathrm{sign}(S_n) \;=\; \lambda\big(6 + 6h\big)$

- $\lambda \geq 0$ modula la forza dell'interazione (temperatura^{-1})
- h descrive l'asimmetria olio-acqua (≥ 0 per conv.)

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Interessati alle proprietà per $N \to \infty$ (limite termodinamico).
A priori due possibili scenari per le traiettorie di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$:

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Interessati alle proprietà per $N \to \infty$ (limite termodinamico).
A priori due possibili scenari per le traiettorie di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$:

- $\mathcal{L}$ocalizzazione: le traiettorie restano vicine all'interfaccia, per massimizzare l'energia $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}$

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Interessati alle proprietà per $N \to \infty$ (limite termodinamico).
A priori due possibili scenari per le traiettorie di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$:

- $\mathcal{L}$ocalizzazione: le traiettorie restano vicine all'interfaccia, per massimizzare l'energia $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}$
- $\mathcal{D}$elocalizzazione: le traiettorie preferiscono fluttuare nell'olio, per massimizzare l'entropia di $\mathbf{P}$

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Interessati alle proprietà per $N \to \infty$ (limite termodinamico).
A priori due possibili scenari per le traiettorie di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$:

- $\mathcal{L}$ocalizzazione: le traiettorie restano vicine all'interfaccia, per massimizzare l'energia $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}$
- $\mathcal{D}$elocalizzazione: le traiettorie preferiscono fluttuare nell'olio, per massimizzare l'entropia di $\mathbf{P}$

Qual è lo scenario corretto? La risposta dipende da λ, h?

Qualche domanda

La misura $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ descrive la distribuzione statistica delle configurazioni del polimero, assegnate le condizioni esterne

Interessati alle proprietà per $N \to \infty$ (limite termodinamico).
A priori due possibili scenari per le traiettorie di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$:

- $\mathcal{L}$ocalizzazione: le traiettorie restano vicine all'interfaccia, per massimizzare l'energia $\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}$
- $\mathcal{D}$elocalizzazione: le traiettorie preferiscono fluttuare nell'olio, per massimizzare l'entropia di $\mathbf{P}$

Qual è lo scenario corretto? La risposta dipende da λ, h?
Come definire precisamente $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$? $\to$ vedremo dopo

Qualche risposta

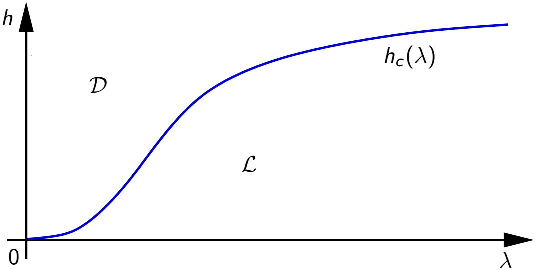
Teorema [Bolthausen e Giacomin, AAP 05]

- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato

Qualche risposta

Teorema [Bolthausen e Giacomin, AAP 05]

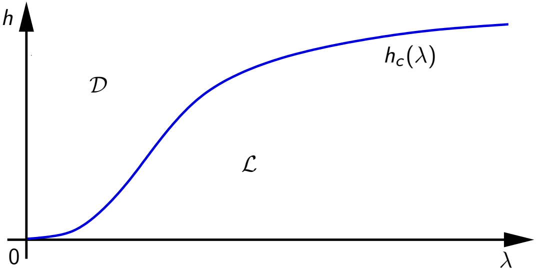
- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato
- Nel piano (λ, h) le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$ sono separate da una curva critica crescente $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ ($\rightarrow$ formula "esplicita")



Qualche risposta

Teorema [Bolthausen e Giacomin, AAP 05]

- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato
- Nel piano (λ, h) le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$ sono separate da una curva critica crescente $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ ($\rightarrow$ formula "esplicita")



Asintotica:

$$h_c(\lambda) \sim \lambda^3$$

per $\lambda \to 0$

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Riscalamento diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$: $X_N(t) := \dfrac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}, \qquad t \in [0,1]$

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Riscalamento diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$: $X_N(t) := \dfrac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}, \qquad t \in [0,1]$

Teorema [C., Giacomin e Zambotti, AAP 07]

Il risc. diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ converge deb. in $C([0,1])$ per $N \to \infty$:

- in $\mathcal{L}$ verso il processo banale $X(t) \equiv 0$ (infatti $S_N = O(\log N)$)

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Riscalamento diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$: $X_N(t) := \dfrac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}, \qquad t \in [0,1]$

Teorema [C., Giacomin e Zambotti, AAP 07]

Il risc. diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ converge deb. in $C([0,1])$ per $N \to \infty$:

- in $\mathcal{L}$ verso il processo banale $X(t) \equiv 0$ (infatti $S_N = O(\log N)$)
- in $\mathcal{D}$ verso il meandro browniano $X(t) = B_t | \{B_s \geq 0 : \forall s \leq 1\}$

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Riscalamento diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$: $X_N(t) := \dfrac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}, \qquad t \in [0,1]$

Teorema [C., Giacomin e Zambotti, AAP 07]

Il risc. diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ converge deb. in $C([0,1])$ per $N \to \infty$:

- in $\mathcal{L}$ verso il processo banale $X(t) \equiv 0$ (infatti $S_N = O(\log N)$)
- in $\mathcal{D}$ verso il meandro browniano $X(t) = B_t | \{B_s \geq 0 : \forall s \leq 1\}$
- sulla curva critica verso il moto browniano riflesso $X(t) = |B_t|$.

Risultati traiettoriali

In che senso nella regione $\mathcal{L}$ (risp. $\mathcal{D}$) le traiettorie del modello $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ sono localizzate (risp. delocalizzate)?

Riscalamento diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$: $X_N(t) := \dfrac{S_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}, \qquad t \in [0,1]$

Teorema [C., Giacomin e Zambotti, AAP 07]

Il risc. diffusivo di $\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}$ converge deb. in $C([0,1])$ per $N \to \infty$:

- in $\mathcal{L}$ verso il processo banale $X(t) \equiv 0$ (infatti $S_N = O(\log N)$)
- in $\mathcal{D}$ verso il meandro browniano $X(t) = B_t | \{B_s \geq 0 : \forall s \leq 1\}$
- sulla curva critica verso il moto browniano riflesso $X(t) = |B_t|$.

Tecniche: Grandi Deviazioni [BG], Teoria di Rinnovo [CGZ]

Programma

Definizione del modello disordinato

Il modello è formalmente lo stesso del caso periodico:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) \;:=\; \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\lambda,h}} \cdot \exp\Big(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S)\Big)$$

$$\text{Energia:} \quad \mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) \;:=\; \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\,\mathrm{sign}(S_n)$$

Definizione del modello disordinato

Il modello è formalmente lo stesso del caso periodico:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) \;:=\; \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\lambda,h}} \cdot \exp\left(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S)\right)$$

$$\text{Energia:} \quad \mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) \;:=\; \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\, \mathrm{sign}(S_n)$$

Cambia la disomogeneità $\omega = +, -, \ldots$, non più deterministica:

$\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ è la realizzazione di un processo aleatorio

$\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. con $\mathbb{P}(\omega_1 = +1) = \mathbb{P}(\omega_1 = -1) = \frac{1}{2}$

Definizione del modello disordinato

Il modello è formalmente lo stesso del caso periodico:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,\omega}^{\lambda,h}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(S) \;:=\; \frac{1}{Z_{N,\omega}^{\lambda,h}} \cdot \exp\left(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S)\right)$$

$$\text{Energia:} \quad \mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h}(S) \;:=\; \lambda \sum_{n=1}^{N} (\omega_n + h)\,\mathrm{sign}(S_n)$$

Cambia la disomogeneità $\omega = +, -, \ldots$, non più deterministica:

$\omega \in \{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ è la realizzazione di un processo aleatorio

$$\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ i.i.d. } \quad \text{con} \quad \mathbb{P}(\omega_1 = +1) = \mathbb{P}(\omega_1 = -1) = \tfrac{1}{2}$$

Due diversi tipi di alea nel sistema ($\mathbb{P}$ "quenched randomness")

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

Funzione di partizione: $Z_{N,\omega}^{\lambda,h} := \mathbf{E}\big(\exp(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h})\big)$

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

Funzione di partizione: $Z_{N,\omega}^{\lambda,h} := \mathbf{E}\big(\exp(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h})\big)$

Energia libera: tasso di crescita esponenziale di Z_N:

$$f_\omega(\lambda, h) \;:=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}^{\lambda,h}$$

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

Funzione di partizione: $Z_{N,\omega}^{\lambda,h} := \mathbf{E}\big(\exp(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h})\big)$

Energia libera: tasso di crescita esponenziale di Z_N:

$$f_\omega(\lambda, h) \ := \ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}^{\lambda,h}$$

[Il limite esiste $\mathbb{P}$-q.c. e in $L^1(\mathbb{P})$ e non dipende da ω: $f_\omega(\lambda, h) = f(\lambda, h)$]

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

Funzione di partizione: $Z_{N,\omega}^{\lambda,h} := \mathbf{E}\big(\exp(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h})\big)$

Energia libera: tasso di crescita esponenziale di Z_N:

$$f_\omega(\lambda, h) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}^{\lambda,h}$$

[Il limite esiste $\mathbb{P}$-q.c. e in $L^1(\mathbb{P})$ e non dipende da ω: $f_\omega(\lambda, h) = f(\lambda, h)$]

Traiettorie $S_n \geq 0$ che fluttuano nell'olio $\longrightarrow$ $\boxed{f(\lambda, h) \geq \lambda h}$

$\mathcal{L}$ocalizzazione e $\mathcal{D}$elocalizzazione: l'energia libera

Come definire precisamente le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$?

Funzione di partizione: $Z_{N,\omega}^{\lambda,h} := \mathbf{E}\big(\exp(\mathcal{H}_{N,\omega}^{\lambda,h})\big)$

Energia libera: tasso di crescita esponenziale di Z_N:

$$f_\omega(\lambda, h) \;:=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}^{\lambda,h}$$

[Il limite esiste $\mathbb{P}$-q.c. e in $L^1(\mathbb{P})$ e non dipende da ω: $f_\omega(\lambda,h) = f(\lambda,h)$]

Traiettorie $S_n \geq 0$ che fluttuano nell'olio $\longrightarrow$ $\boxed{f(\lambda,h) \geq \lambda h}$

Definizione:

- $\mathcal{L} \;=\; \big\{(\lambda,h) \,:\, f(\lambda,h) > \lambda\, h\big\}$
- $\mathcal{D} \;=\; \big\{(\lambda,h) \,:\, f(\lambda,h) = \lambda\, h\big\}$

La curva critica

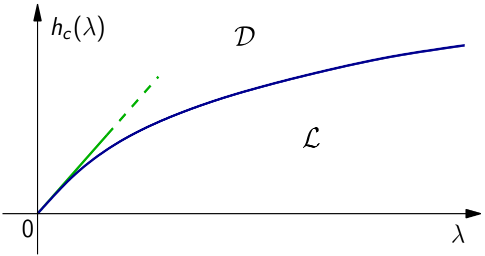
Teorema [Bolthausen e den Hollander, AP 97]

- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato

La curva critica

Teorema [Bolthausen e den Hollander, AP 97]

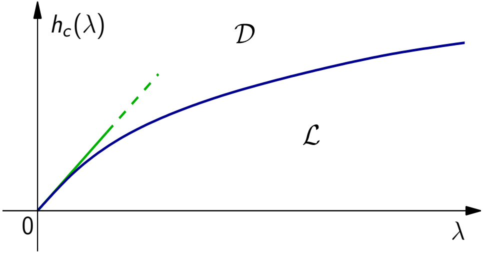
- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato
- Nel piano (λ, h) le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$ sono separate da una curva critica crescente $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ $(\to$ no formula esplicita$)$



La curva critica

Teorema [Bolthausen e den Hollander, AP 97]

- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato
- Nel piano (λ, h) le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$ sono separate da una curva critica crescente $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ ($\longrightarrow$ no formula esplicita)



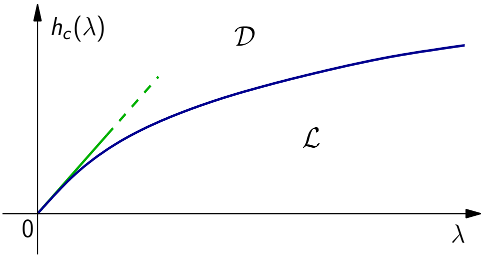
Asintotica per $\lambda \to 0$:

$$h_c(\lambda) \sim m\lambda, \quad m > 0$$

La curva critica

Teorema [Bolthausen e den Hollander, AP 97]

- C'è una transizione di fase non banale tra un regime $\mathcal{L}$ocalizzato e un regime $\mathcal{D}$elocalizzato
- Nel piano (λ, h) le regioni $\mathcal{L}$ e $\mathcal{D}$ sono separate da una curva critica crescente $\lambda \mapsto h_c(\lambda)$ $(\rightarrow$ no formula esplicita$)$



Asintotica per $\lambda \to 0$:

$$h_c(\lambda) \sim m\lambda, \quad m > 0$$

- Riscal. browniano
- Universalità

Individuare la curva critica

Famiglia di curve indicizzata da $q > 0$: $h^{(q)}(\lambda) := \dfrac{\log \cosh(2q\lambda)}{2q\lambda}$

Individuare la curva critica

Famiglia di curve indicizzata da $q > 0$: $h^{(q)}(\lambda) := \dfrac{\log\cosh(2q\lambda)}{2q\lambda}$

Congetture fisiche:

- $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$ [Garel et al. 89; Maritan et al. 99]
- $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$ [Monthus 00; Stepanov et al. 98]

Individuare la curva critica

Famiglia di curve indicizzata da $q > 0$: $h^{(q)}(\lambda) := \dfrac{\log\cosh(2q\lambda)}{2q\lambda}$

Congetture fisiche:

- $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$ [Garel et al. 89; Maritan et al. 99]
- $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$ [Monthus 00; Stepanov et al. 98]

Teorema [BdH, AP 97], [Bodineau e Giacomin, JSP 04]

$$\boxed{h^{(2/3)}(\cdot) \le h_c(\cdot) \le h^{(1)}(\cdot)}$$

Individuare la curva critica

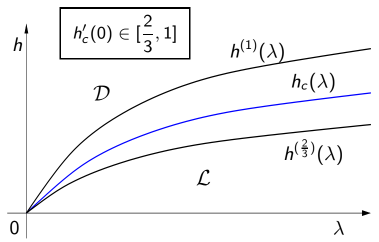
Famiglia di curve indicizzata da $q > 0$: $h^{(q)}(\lambda) := \dfrac{\log\cosh(2q\lambda)}{2q\lambda}$

Congetture fisiche:

- $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$ [Garel et al. 89; Maritan et al. 99]
- $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$ [Monthus 00; Stepanov et al. 98]

Teorema [BdH, AP 97], [Bodineau e Giacomin, JSP 04]

$$\boxed{h^{(2/3)}(\cdot) \le h_c(\cdot) \le h^{(1)}(\cdot)}$$



Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$?

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 :\ h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \ h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \; h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore
- Uso del computer solo per simulare le variabili ω_n

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \; h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore
- Uso del computer solo per simulare le variabili ω_n

Il p-value del test è $< 10^{-5}$!
Forti evidenze che $h_c(\lambda) > h^{(2/3)}(\lambda)$

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \ h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore
- Uso del computer solo per simulare le variabili ω_n

Il p-value del test è $< 10^{-5}$!
Forti evidenze che $h_c(\lambda) > h^{(2/3)}(\lambda)$

Forse $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$?

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \ h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore
- Uso del computer solo per simulare le variabili ω_n

Il p-value del test è $< 10^{-5}$!
Forti evidenze che $h_c(\lambda) > h^{(2/3)}(\lambda)$

Forse $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$? NO(?): evidenze numeriche [CGG, JSP 06]

Migliorare le stime sulla curva critica

Forse $h_c(\cdot) = h^{(2/3)}(\cdot)$? NO(?) [C., Giacomin e Gubinelli, JSP 06]

- Test statistico per l'ipotesi $\boxed{H_0 : \; h_c(\lambda) = h^{(2/3)}(\lambda)}$
- Super-additività + Disuguaglianze di concentrazione: stima rigorosa della probabilità di errore
- Uso del computer solo per simulare le variabili ω_n

Il p-value del test è $< 10^{-5}$!
Forti evidenze che $h_c(\lambda) > h^{(2/3)}(\lambda)$

Forse $h_c(\cdot) = h^{(1)}(\cdot)$? NO(?): evidenze numeriche [CGG, JSP 06]

- Dimostrazione per λ grande [Toninelli 07]

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale
- Punti da chiarire:
  - Individuare la curva critica (o almeno la tangente in zero)

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale
- Punti da chiarire:
  - Individuare la curva critica (o almeno la tangente in zero)
  - Regolarità della transizione
    (almeno secondo ordine, [Giacomin e Toninelli, CMP 06])

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale
- Punti da chiarire:
  - Individuare la curva critica (o almeno la tangente in zero)
  - Regolarità della transizione
    (almeno secondo ordine, [Giacomin e Toninelli, CMP 06])

Risultati traiettoriali:

- Risultati forti in $\mathcal{L}$ (Sinai, Biskup, den Hollander, Giacomin, Toninelli)

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale
- Punti da chiarire:
  - Individuare la curva critica (o almeno la tangente in zero)
  - Regolarità della transizione
    (almeno secondo ordine, [Giacomin e Toninelli, CMP 06])

Risultati traiettoriali:

- Risultati forti in $\mathcal{L}$ (Sinai, Biskup, den Hollander, Giacomin, Toninelli)
- Molte domande aperte in $\mathcal{D}$ [Giacomin e Toninelli, PTRF 05]

Conclusioni

Energia libera e curva critica:

- Buona comprensione generale
- Punti da chiarire:
  - Individuare la curva critica (o almeno la tangente in zero)
  - Regolarità della transizione
    (almeno secondo ordine, [Giacomin e Toninelli, CMP 06])

Risultati traiettoriali:

- Risultati forti in $\mathcal{L}$ (Sinai, Biskup, den Hollander, Giacomin, Toninelli)
- Molte domande aperte in $\mathcal{D}$ [Giacomin e Toninelli, PTRF 05]

G. Giacomin, Random Polymer Models, Imperial College Press 07