Un'estensione multilineare del Teorema Limite Centrale e il fenomeno dell'Universalità per sistemi disordinati

Francesco Caravenna

Università degli Studi di Milano-Bicocca

XX Congresso dell'U.M.I. $\sim$ Siena $\sim$ 10 settembre 2015

Sommario

UNIVERSALITÀ

Molti modelli microscopici $\rightsquigarrow$ Lo stesso modello macroscopico

- Il Teorema Limite Centrale (TLC) e una sua estensione multilineare
- Sistemi disordinati in meccanica statistica

Sommario

1. Il Teorema Limite Centrale e una sua estensione multilineare

2. Il fenomeno dell'Universalità per sistemi disordinati

Il Teorema Limite Centrale

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \qquad \mathbb{E}[X_i^2] = 1$$

Densità: $\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx = 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2\, f(x)\, dx = 1$

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$\mathbb{E}[S_n] = 0 \qquad \mathbb{E}[S_n^2] = n \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = 1$$

TLC $\quad \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \qquad g(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}$

$$\sqrt{n}\,(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{n \text{ volte}})(\sqrt{n}\,x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} g(x)$$

Universalità!

La dimostrazione di Lindeberg

1. Universalità. Per n grande, la distribuzione di

$$Z_n := \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

è insensibile ai dettagli della distribuzione delle singole X_i

Principio di Lindeberg (1922)

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i'] = 0 \qquad \mathbb{E}[(X_i)^2] = \mathbb{E}[(X_i')^2] = 1$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$$\Big| \mathbb{E}\big[\varphi(Z_n)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(Z_n')\big] \Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Punto Fisso. Se $X_i' \sim N(0,1)$ allora $Z_n' \sim N(0,1)$ $\rightsquigarrow$ TLC

Un'estensione multilineare

Rimpiazziamo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ con

$$Y_n := \sum_{1 \le i \ne j \le n} c_{ij} \, X_i \, X_j \qquad c_{ij} = c_{ji} \qquad \boxed{c_{ii} = 0}$$

$$\mathbb{E}[Y_n] = 0 \qquad \mathbb{E}[Y_n^2] = \sum_{1 \le i,j \le n} c_{ij}^2 =: s_n^2 = 1 \qquad (\text{con } c_{ij} = c_{ij}^{(n)})$$

Convergenza $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \ldots$? 1. Universalità. Principio di Lindeberg ? SÌ !

$$\sup_{1 \le i \le n} \left\{ \mathrm{Inf}(i) = \sum_{1 \le j \le n} c_{i,j}^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Big| \mathbb{E}\big[\varphi(Y_n)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi(Y_n')\big] \Big| \longrightarrow 0$$

- [Mossel, O'Donnell, Oleszkiewicz, *Ann. Math.* 2010] $\mathbb{E}[|X_i|^3] < \infty$
- [C., Sun, Zygouras, *JEMS* 2015+] $\mathbb{E}[|X_i|^2] < \infty$ + unif. integrab.
- [Chatterjee, *Ann. Probab.* 2006] [Tao, Vu, *Acta Math.* 2011]

Un'estensione multilineare

Convergenza di $\quad Y_n := \sum_{1 \le i < j \le n} c_{ij}\, X_i\, X_j$

2. Punto fisso? SÌ! $\quad X_i \sim N(0,1) \overset{d}{=} \sqrt{n}\left(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}\right)$ Moto browniano

$$c_{ij} \sim \tfrac{1}{n} f\left(\tfrac{i}{n}, \tfrac{j}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y := \int_{0<s<t<1} f(s,t)\, \mathrm{d}B_s\, \mathrm{d}B_t$$

- Y_n polinomio multilineare di grado qualunque $(\rightsquigarrow Y_n$ serie$)$
- Variabile limite Y non gaussiana (funzione "esplicita" di B)

Altro regime (c_{ij} "degeneri"): $\quad Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ [Teorema momento 4°]

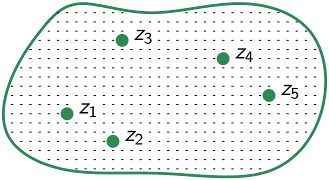
[de Jong, 1990] [Nualart, Peccati, 2005] [Nourdin, Peccati, Reinert, 2010]

Sommario

Modelli su reticolo

Reticolo $\mathbb{T}_\delta \subseteq \mathbb{R}^d$ (raggio δ)

$$z \longmapsto \text{“spin”} \ \sigma_z \in \begin{cases} \pm 1 \\ \{0,1\} \end{cases}$$



1. $\mathcal{S} = \{0,1\}^{\mathbb{T}_\delta}$ spazio delle configurazioni di $\sigma = (\sigma_z)_{z \in \mathbb{T}_\delta}$
2. P_δ probabilità “interessante” su $\mathcal{S}$: correlazioni polinomiali

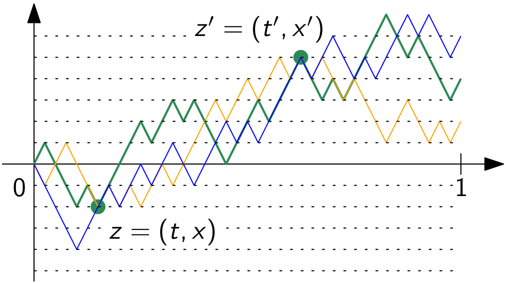
$$\exists \gamma > 0 : \qquad \frac{\mathrm{P}_\delta\big(\sigma_{\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}} = 1\big)}{(\delta^\gamma)^k} \xrightarrow[\delta \to 0]{L^2(\mathbb{R}^d)} \psi_k(z_1, \ldots, z_k)$$

P_δ ha un limite continuo non banale per $\delta \to 0$

- Ising in $\mathbb{Z}^2$ alla temperatura critica [Chelkak, Hongler, Izyurov 2015] [Chelkak, Smirnov 2012] [Camia, Garban, Newman 2015]

Passeggiate aleatorie

- $\mathbb{T}_\delta := \delta\mathbb{N} \times \sqrt{\delta}\mathbb{Z}$ $\qquad$ P_δ = passeggiata aleatoria (varianza finita)



$$\frac{\mathrm{P}_\delta\big(\sigma_{\{z,z'\}} = 1\big)}{(\sqrt{\delta})^2} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \psi_2(z,z') = \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \, \frac{e^{-\frac{(x'-x)^2}{2t'}}}{\sqrt{2\pi(t'-t)}}$$

Sistemi disordinati

1. $\mathcal{S} = \{0,1\}^{\mathbb{T}_\delta}$ spazio delle configurazioni di $\sigma = (\sigma_z)_{z \in \mathbb{T}_\delta}$
2. P_δ probabilità "interessante" su $\mathcal{S}$
3. Disordine: variabili aleatorie $(\omega_z)_{z\in\mathbb{T}_\delta}$ i.i.d. (indipendenti da σ)

$$\mathbb{E}[\omega_z] = 0 \qquad \mathbb{E}[\omega_z^2] = 1 \qquad \mathbb{E}[e^{\beta\omega_z}] < \infty \qquad [\text{es. } \omega_z \sim N(0,1)]$$

Misura di Gibbs $\qquad \mathcal{P}_\delta^\omega(\sigma) := \dfrac{1}{\mathcal{Z}_\delta^\omega}\, e^{\mathcal{H}^\omega(\sigma)}\, \mathrm{P}_\delta(\sigma)$

- Energia: $\sigma \mapsto \mathcal{H}^\omega(\sigma) := \sum_{z\in\mathbb{T}_\delta} \big(\beta\,\omega_z + h\big)\,\sigma_z \qquad (\beta, h \in \mathbb{R})$

ω_z = premio (> 0) o penalizzazione (< 0) nel sito $z \in \mathbb{T}_\delta$

Quanto è diversa $\mathcal{P}_\delta^\omega$ da P_δ ? (per $\delta \to 0$ e $\beta, h \to 0$)

La funzione di partizione

Le proprietà della misura $\mathcal{P}_\delta^\omega$ sono racchiuse nella funzione di partizione

$$\mathcal{Z}_\delta^\omega = \mathrm{E}_\delta\left[e^{\mathcal{H}^\omega(\sigma)}\right] = \sum_{\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_\delta}} \prod_{z \in \mathbb{T}_\delta} \left(1 + X_z \sigma_z\right) \mathrm{P}_\delta(\sigma)$$

- $\mathcal{Z}_\delta^\omega$ è una variabile aleatoria (funzione complicata delle ω_z)
- Nuove variabili $X_z = e^{\beta\omega_z + h} - 1$

$\mathcal{Z}_\delta^\omega$ è un polinomio multilineare $p_\delta(X)$

Sketch

1. Linearizzazione: $e^{(\beta\,\omega_z + h)\sigma_z} = 1 + X_z \sigma_z$
2. Espansione binomiale $\rightsquigarrow$ $\mathcal{Z}_\delta^\omega = \sum_{A \subseteq \mathbb{T}_\delta} \mathrm{P}_\delta(\sigma_A = 1) \prod_{z \in A} X_z$

Universalità per disordine debole

Hp. $\exists \gamma > 0 : \quad \dfrac{\mathrm{P}_\delta\big(\sigma_{\{z_1,\dots,z_k\}} = 1\big)}{(\delta^\gamma)^k} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \psi_k(z_1,\dots,z_k)$

Teorema [Alberts, Quastel, Khanin, 2014] [C., Sun, Zygouras, 2015]

Per $\delta \to 0$, riscalando le costanti di accoppiamento

$$\beta \sim \hat\beta\,\delta^{\frac{d}{2}-\gamma} \qquad h \sim -\frac{\beta^2}{2} + \hat h\,\delta^{d-\gamma}$$

si ha la convergenza $\mathcal{Z}_\delta^\omega \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z}^W$ con

$$\boldsymbol{Z}^W := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int \cdots \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \psi_k(z_1,\dots,z_k) \prod_{i=1}^k \big(\hat\beta\,\mathrm{d}W(z_i) + \hat h\,\mathrm{d}z_i\big)$$

$\boxed{\text{Universalità!}}$

Conclusioni

- $Z^W \rightsquigarrow \begin{cases} \text{costruzione della misura di Gibbs continua } \mathcal{P}_\delta^\omega \xrightarrow{d} \mathbf{P}^W \\ \text{stime su energia libera / curva critica per } \beta, h \to 0 \end{cases}$

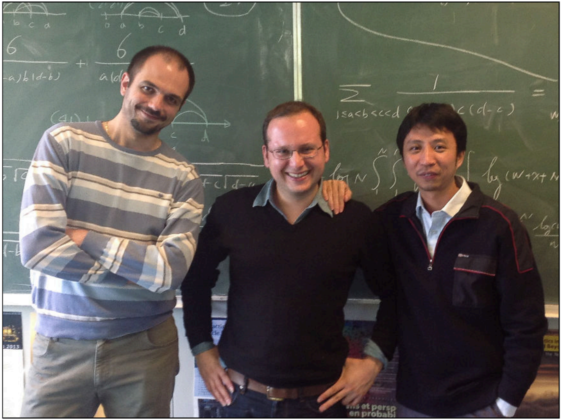
- Hp.: convergenza in L^2 delle correlazioni riscalate

  $\rightsquigarrow$ Regime di disordine rilevante (criterio di Harris)

- Legame con l'equazione del calore stocastica

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \dot{W}(t,x)\, u(t,x)$$

Collaboratori



In collaborazione con Nikos Zygouras (Warwick) e Rongfeng Sun (NUS)